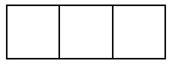
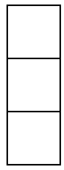
Exercice national (à traiter par tous les candidats)

Batailles navales

Un joueur effectue une sorte de « bataille navale » sur un damier carré de $n \times n$ cases, avec $n \geq 3$.
Un bateau est représenté par un rectangle constitué de trois cases de la taille des cases du damier.
Il est placé horizontalement ou verticalement sur trois cases du damier.

Le bateau est invisible du joueur.





Le joueur effectue plusieurs tirs sur des cases distinctes du damier dans le but de toucher au moins une des cases occupées par le bateau.

On appelle *« jeu optimal »* un ensemble de tirs permettant de toucher le bateau à coup sûr, quelle que soit la position occupée par celui-ci, et comprenant le nombre minimal de tirs pour y parvenir.

On note $\mathrm{J}(n)$ le nombre de tirs réalisés dans un jeu optimal. Le but de cet exercice est de déterminer $\mathrm{J}(n)$ et de réaliser un jeu optimal effectif.

Partie A : étude de trois cas particuliers

1. Cas où $n = 3$

a. Combien de positions différentes le bateau est-il susceptible d'occuper sur le damier ?

b. Reproduire le damier sur la copie et indiquer trois cases sur lesquelles tirer pour que le bateau soit touché à coup sûr. On placera une croix ($\times$) dans chacune de ces cases.

c. Montrer qu'on ne peut pas réaliser un jeu optimal avec deux tirs.

d. En déduire que $\mathrm{J}(3) = 3$.

2. Cas où $n = 4$

a. Sur un damier 4×4, indiquer cinq positions pour le bateau qui n'ont aucune case en commun deux à deux. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{J}(4)$?

b. Représenter un jeu optimal à cinq tirs sur un damier 4×4. En déduire $\mathrm{J}(4)$.

3. Cas où $n = 5$. Montrer que $\mathrm{J}(5) = 8$.

Partie B : cas général

1. Cas où $n = 3p$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Indiquer une façon de placer sur le damier un nombre maximal de positions disjointes deux à deux pouvant être occupées par le bateau. Que peut-on dire de $\mathrm{J}(3p)$?

b. En utilisant le schéma proposé en **A1.b**, expliquer comment réaliser un jeu optimal pour $n = 3p$.

c. Montrer que $\mathrm{J}(3p) = 3p^2$.

2. Cas où $n = 3p + 1$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Combien peut-on placer au maximum sur le damier de positions du bateau disjointes deux à deux ?

b. Réaliser un jeu optimal pour $n = 3p + 1$ en expliquant avec précision la démarche.

c. Que vaut $\mathrm{J}(3p + 1)$?

3. Recherche d'une caractérisation commune de $\mathrm{J}(n)$, pour tout entier $n \geq 3$.
On traite le cas $n = 3p + 2$ par des raisonnements analogues à ceux des cas $n = 3p$ et $n = 3p + 1$ et on obtient : $\mathrm{J}(3p + 2) = 3p^2 + 4p + 1$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\mathrm{J}(n)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{n^2}{3}$ **.**

b. Existe-t-il un entier n tel que $\mathrm{J}(n)$= 2020 ?